

**ХII ЕЖЕГОДНЫЙ ВСЕРОССИЙСКИЙ КОНКУРС ДОСТИЖЕНИЙ
ТАЛАНТЛИВОЙ МОЛОДЁЖИ
«НАЦИОНАЛЬНОЕ ДОСТОЯНИЕ РОССИИ»**

Секция: Информационные технологии, математика

**Тема: Применение Maple к исследованиям свободных изгибных колебаний
балки на упругом основании**

Автор: Коняев Юрий Сергеевич

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доц. Сафина Г.Ф.

**Место выполнения работы: ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и
технологий», Нефтекамский филиал**

ВВЕДЕНИЕ

Решение поставленной задачи колебания балки на упругом основании связано с тем, что в ряде случаев колебания мешают нормальной эксплуатации или даже непосредственно угрожают прочности, постепенно подготавливая усталостное разрушение; в таких случаях теория может указать пути для уменьшения вредных колебаний.

Балки широко используются при строительстве зданий, мостов, путепроводов, эстакад и прочих сооружений. Наибольшее количество строящихся мостов является балочными. Это основные сооружения при строительстве переправ малой длины (малые автомобильные и железнодорожные мосты, акведуки, путепроводы, эстакады). Переходы через преграды (реки и овраги) балочного типа были первыми в истории мостами. Наплавные мосты, опирающиеся на понтоны, по конструкции являются тоже мостами балочного типа.

Поэтому опоры балочных мостов могут быть как жесткими (у стационарных мостов), так и упругими (у наплавных мостов). При строительстве промышленных зданий также используются балки, которые работают на изгиб под действием не только статической, но и периодически меняющейся нагрузки.

Балки мостов работают на изгиб, и поэтому совершенно оправданным является изучение поперечных колебаний балок, которое сводится к исследованию как свободных, так и вынужденных колебаний балочных мостов при проходе по ним подвижной нагрузки¹.

Задачи по свободным и вынужденным колебаниям механической системы рассмотрены в учебниках Л.В. Ефремова², В.Л. Бидермана³, Е. В. Бурлакова, В. Ф. Антонова. Способы составления уравнений движения описаны в работе С.П. Тимошенко⁴. Работа А.В. Матросова⁵ посвящена использованию компьютерных технологий в теории и практике колебаний механических установок.

Прямая задача по колебаниям балки на упругом основании рассмотрена в работе Коренева⁶ Б. Г., Ручимского М. Н. Общие вопросы теории колебаний рассмотрены в работе А.Г. Костюка⁷. В отличие от указанных работ данной научной работе исследуется прямая задача для балки с упругим основанием с использованием математического пакета для рассмотрения влияния на частоты колебаний балки его упругих опор.

Целью научной работы является применение пакета Maple к задаче исследования зависимости частот поперечных колебаний для балки на упругом основании.

Основными **задачами** работы являются:

- рассмотрение прямой задачи по определению собственных частот колебаний балки на упругом основании, вывод частотного уравнения;
- программная реализация задачи поиска частот с помощью функционала математического Maple;
- исследование зависимостей собственных частот колебаний балки от жесткостей упругих опор.

¹ Доев В.С. Поперечные колебания балок - учебное пособие М КНОРУС, 2016. — 412 с.

² Ефремов Л.В. Теория и практика исследований крутильных колебаний силовых установок с применением компьютерных технологий. – М.: Издательство «Наука», 2007. – С. 143-147.

³ Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. – Издательство «Питер», 2001. – С. 45-53.

⁴ Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Издательство «Наука», 1967. – С. 356-363.

⁵ Матросов А. В. Maple 7. Решение задач высшей математики и механики. – Издательство «ВНУ», 2000. – С. 499-503.

⁶ Корнев Б. Г., Ручимский М. Н. Некоторые задачи динамики балок на упругом основании ЦНИПС, научное сообщение, Гос. Изд. Литературы по строит. И архитектуре, 1955.

⁷ Костюк А.Г. Динамика и прочность турбомашин. – М.: Издательский дом МЭИ, 2007. – С. 232-238.

Методы исследований. Поставленные задачи решались аналитически с применением вычислений на ЭВМ8.

Научная новизна и практическая значимость полученных результатов состоит в том, что решена прямая задача по определению частот колебаний балки на упругом основании. По решению прямой задачи показано, что частоты собственных колебаний существенно зависят от коэффициентов жесткостей ее упругих закреплений.

Подобные исследования влияния характеристик балки на частоты ее колебаний важны при решении проблемы сохранения безопасных частот колебаний балки.

1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ

1.1 Поперечные колебания балки

Рассмотрим балку, показанную на рис. 1.1, совершающую поперечные (изгибные) колебания. Полагаем, что центр изгиба поперечного сечения совпадает с его центром тяжести, а одна из главных центральных осей инерции сечения лежит в плоскости изгиба xu . Обозначим через $q_y = q_y(x, t)$ распределенную возмущающую нагрузку, через $u_y = u_y(x, t)$ – поперечные перемещения точек оси балки.



Рисунок 1.1 – Балка на упругом основании

Выделим на расстоянии x от начала координат бесконечно малый элемент балки длиной dx и покажем на рис. 1.2 силы, действующие на него в процессе колебаний. Здесь $Q_y = Q_y(x, t)$ – перерезывающая сила, $M_z = M_z(x, t)$ – изгибающий момент. Правило знаков для Q_y и M_z соответствует принятому в сопротивлении материалов.

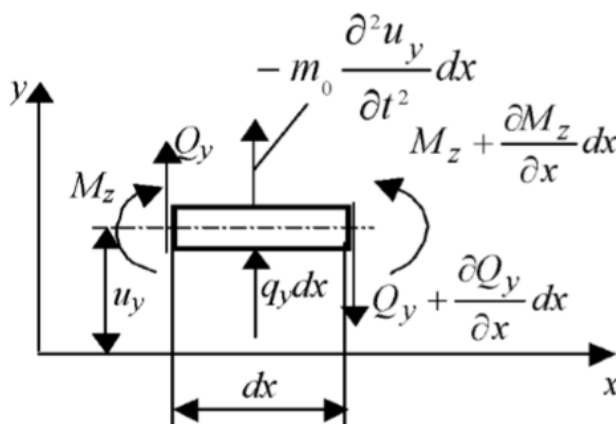


Рисунок 1.2 – Силы, действующие на балку в процессе колебаний

⁸ Дьяконов, В.П. Maple 7. Учебный курс. – СПб: Издательство «Питер», 2002. – 276-290.

Воспользуемся принципом Д'Аламбера и спроектируем все силы на ось Oy , тогда:

$$-m_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} dx + q_y dx + Q_y - \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial x} dx \right) = 0.$$

$$\text{Откуда: } m_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} = q_y.$$

Если пренебречь инерцией вращения выделенного элемента, то из уравнения моментов относительно оси z получится известное соотношение $Q_y = \frac{\partial M_z}{\partial x}$. Перемещение u_y обусловлено изгибом балки и сдвигом. При построении приближенной теории поперечных колебаний обычно сдвигом пренебрегают.

В этом случае при малых колебаниях можно воспользоваться дифференциальным уравнением изогнутой оси балки $M_z = EI_z \partial^2 u_y / \partial x^2$, где I_z – момент инерции поперечного сечения относительно главной центральной оси. Подстановка приведенных соотношений в последнее равенство дает дифференциальное уравнение поперечных колебаний балки переменного сечения в виде:

$$m_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_z \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right) = q_y. \quad (1.1)$$

Для однородной балки постоянного сечения получим

$$m_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + EI_z \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} = q_y. \quad (1.2)$$

Рассмотрим теперь свободные поперечные колебания балки постоянного сечения. При отсутствии возмущающих сил дифференциальное уравнение (1.2) имеет вид:

$$m_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + EI_z \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} = 0. \quad (1.3)$$

Имея в виду, что свободные или собственные колебания носят гармонический характер, частное решение уравнения (1.3) будем отыскивать в форме

$$u_y(x, t) = v(x) \sin(\omega t + \varphi). \quad (1.4)$$

Подстановка (1.4) в (1.3) приводит к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению

$$-m_0 \omega^2 v(x) + EI_z v^{IV}(x) = 0.$$

Введем обозначение

$$\alpha^4 = m_0 \omega^2 / (EI_z) \quad (1.5)$$

и приведем последнее уравнение к виду

$$v^{IV}(x) - \alpha^4 v(x) = 0. \quad (1.6)$$

Этому дифференциальному уравнению при $a \neq 0$ ($\omega \neq 0$) соответствует характеристическое уравнение $k^4 - \alpha^4 = 0$ или $(k^2 - \alpha^2)(k^2 + \alpha^2) = 0$, корни которого равны $k_{1,2} = \pm \alpha$, $k_{3,4} = \pm i\alpha$. Следовательно, частными решениями дифференциального уравнения (1.6) являются функции $ch \alpha x$, $sh \alpha x$, $\cos \alpha x$, $\sin \alpha x$. Известно, что любая линейная комбинация частных решений дифференциального уравнения дает также частное решение. При

исследовании поперечных колебаний балки удобно за частные решения уравнения (1.6) принять функции Крылова^{9,10}:

$$\left. \begin{aligned} K_1(\alpha x) &= \frac{1}{2}(ch \alpha x + \cos \alpha x); \\ K_2(\alpha x) &= \frac{1}{2}(sh \alpha x + \sin \alpha x); \\ K_3(\alpha x) &= \frac{1}{2}(ch \alpha x - \cos \alpha x); \\ K_4(\alpha x) &= \frac{1}{2}(sh \alpha x - \sin \alpha x). \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Функции Крылова обладают некоторыми особыми свойствами. Дифференцирование их по x дает (1.8)

$$\left. \begin{aligned} K_1'(\alpha x) &= \alpha K_4(\alpha x), \quad K_1''(\alpha x) = \alpha^2 K_3(\alpha x), \quad K_1'''(\alpha x) = \alpha^3 K_2(\alpha x); \\ K_2'(\alpha x) &= \alpha K_1(\alpha x), \quad K_2''(\alpha x) = \alpha^2 K_4(\alpha x), \quad K_2'''(\alpha x) = \alpha^3 K_3(\alpha x); \\ K_3'(\alpha x) &= \alpha K_2(\alpha x), \quad K_3''(\alpha x) = \alpha^2 K_1(\alpha x), \quad K_3'''(\alpha x) = \alpha^3 K_4(\alpha x); \\ K_4'(\alpha x) &= \alpha K_3(\alpha x), \quad K_4''(\alpha x) = \alpha^2 K_2(\alpha x), \quad K_4'''(\alpha x) = \alpha^3 K_1(\alpha x). \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Можно заметить, что при $x = 0$:

$$\left. \begin{aligned} K_1(0) &= 1, \quad K_2(0) = K_3(0) = K_4(0) = 0; \quad K_2'(0) = \alpha, \quad K_1'(0) = K_3'(0) = K_4'(0) = 0; \\ K_3''(0) &= \alpha^2, \quad K_1''(0) = K_2''(0) = K_4''(0) = 0; \quad K_4'''(0) = \alpha^3, \quad K_1'''(0) = K_2'''(0) = K_3'''(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Запишем теперь общее решение дифференциального уравнения (1.6):

$$v(x) = c_1 K_1(\alpha x) + c_2 K_2(\alpha x) + c_3 K_3(\alpha x) + c_4 K_4(\alpha x), \quad (1.10)$$

где $c_i (i = 1, 4) = \text{const}$.

Суммируя (1.4), получим общее решение дифференциального уравнения (1.3) в частных производных в виде:

$$u_y(x, t) = \sum_{\infty} v(x) \sin(\omega t + \varphi). \quad (1.11)$$

Для дальнейших рассуждений потребуются выражения для угла поворота поперечных сечений $\vartheta_z(x, t) = \partial u_y(x, t) / \partial x$, изгибающего момента $M_z(x, t) = EI_Z \partial^2 u_y(x, t) / \partial x^2$ и перерезывающей силы $Q_y(x, t) = EI_Z \partial^3 u_y(x, t) / \partial x^3$. Подставим в эти соотношения выражения (1.11), (1.10) и получим

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_z(x, t) &= \sum_{\infty} \vartheta(x) \sin(\omega t + \varphi); \\ M_z(x, t) &= \sum_{\infty} M(x) \sin(\omega t + \varphi); \\ Q_z(x, t) &= \sum_{\infty} Q(x) \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

где

⁹ Колосова, Г.С., Куроедов, В.В. Применение функций Крылова А. Н. для решения задач строительной механики. – СПб. : ФГБОУ ВПО СПбГПУ, 2013 – 43с.

¹⁰ Мигулин, В.В. Основы теории колебаний / В.В. Мигулин – М.: Издательство «Наука», 1978. – 392 с.

$$\left. \begin{aligned} \vartheta(x) &= \alpha[c_1 K_4(\alpha x) + c_2 K_1(\alpha x) + c_3 K_2(\alpha x) + c_4 K_3(\alpha x)]; \\ M(x) &= EI_z \alpha^2 [c_1 K_3(\alpha x) + c_2 K_4(\alpha x) + c_3 K_1(\alpha x) + c_4 K_2(\alpha x)]; \\ Q(x) &= EI_z \alpha^2 [c_1 K_2(\alpha x) + c_2 K_3(\alpha x) + c_3 K_4(\alpha x) + c_4 K_1(\alpha x)]. \end{aligned} \right\} \quad 1.13$$

Для $x = 0$, учитывая (1,9), запишем

$$v(0) = c_1, \quad \vartheta(0) = \alpha c_2, \quad M(0) = EI_z \alpha^2 c_3, \quad Q(0) = EI_z \alpha^3 c_4$$

или

$$c_1 = v(0), \quad c_2 = \frac{\vartheta(0)}{\alpha}, \quad c_3 = \frac{M(0)}{\alpha^2 EI_z}, \quad c_4 = \frac{Q(0)}{\alpha^3 EI_z}. \quad (1.14)$$

При $\alpha = 0$ ($\omega = 0$) дифференциальное уравнение (1.6) принимает вид $v_0^{IV}(x) = 0$. Его решением будет функция

$$v_0(x) = c_{10} + c_{20}x + c_{30}x^2 + c_{40}x^3 \quad (1.15)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_0(x) &= v_0'(x) = c_{20} + 2c_{30}x + 3c_{40}x^2; \\ M_0(x) &= EI_z v_0''(x) = EI_z (2c_{30} + 6c_{40}x); \\ Q_0(x) &= EI_z v_0'''(x) = 6EI_z c_{40}. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

1.2 Определение частот и форм собственных поперечных колебаний при различных условиях закрепления балки

Пусть балка шарнирно закреплена по концам (рис. 1.3). В этом случае на концах балки перемещение $u_y(x,t)$ и изгибающий момент $M_z(x,t)$ в каждый момент времени равны нулю.

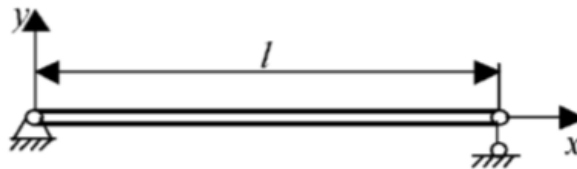


Рисунок 1.3 – Балка, шарнирно закрепленная по концам

Отсюда следуют граничные условия:

$$\begin{array}{cccc} 1. & 2. & 3. & 4. \\ v(0) = 0, & M(0) = 0, & v(l) = 0, & M(l) = 0. \end{array}$$

Из первых двух условий с учетом (1.14) вытекает, что $c_1 = c_3 = 0$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} v(x) &= c_2 K_2(\alpha, x) + c_4 K_4(\alpha, x); \\ M(x) &= EI_z \alpha^2 [c_2 K_4(\alpha, x) + c_4 K_2(\alpha, x)]. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Положим здесь $x = l$ и в соответствии с граничными условиями 3 и 4 запишем систему уравнений относительно постоянных c_2 и c_4 :

$$\left. \begin{aligned} c_2 K_2(\beta) + c_4 K_4(\beta) &= 0, (\beta = \alpha l); \\ EI_z \alpha^2 [c_2 K_4(\beta) + c_4 K_2(\beta)] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Поскольку система уравнений однородная, то при $\alpha \neq 0$ нетривиальное решение будет иметь место, если ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} K_2(\beta) & K_4(\beta) \\ K_4(\beta) & K_2(\beta) \end{vmatrix} = 0.$$

Развернув определитель, получим $K_2^2(\beta) - K_4^2(\beta) = 0$ или

$$[K_2(\beta) + K_4(\beta)][K_2(\beta) - K_4(\beta)] = 0 \quad (1.19)$$

С учетом (1.7) имеем $K_2(\beta) + K_4(\beta) = sh\beta$. Если $sh\beta = 0$, то $\beta = 0$ ($\alpha = 0$). Можно показать, что это противоречит граничным условиям задачи. В самом деле, подставив (1.15), (1.16) в граничные условия, получим:

$$\begin{aligned} 1. \nu_0(0) = c_{10} = 0 & \qquad 3. \nu_0(l) = c_{10} + c_{20}l + c_{30}l^2 + c_{40}l^3 = 0, \\ 2. M_0(0) = 2EI_Z c_{30} = 0, & \qquad 4. M_0(l) = EI_Z(2c_{30} + 6c_{40}l). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что все постоянные интегрирования оказываются равными нулю, т.е. $\nu_0(x) = 0$. Таким образом, перемещения, соответствующие $\beta = 0$, при рассматриваемых условиях закрепления невозможны, и первый множитель в (1.19) не может быть равным нулю. Следовательно, нулю равен второй множитель:

$$K_2(\beta) - K_4(\beta) = \sin \beta = 0. \quad (1.20)$$

Отсюда

$$\beta = \pi(r = \overline{1, \infty}), \quad \alpha = \pi r/l.$$

На основании (1.5) частоты собственных колебаний будут равны

$$\omega = \alpha^2 \sqrt{EI_Z/m_0} = \beta^2 \sqrt{EI_Z/(m_0 l^4)}. \quad (1.21)$$

Рассмотрим консольную балку (рис. 1.4). Здесь у заделки равны нулю перемещение u_y и угол поворота сечения ϑ_z , а на свободном конце – изгибающий момент M_z и перерезывающая сила Q_y .

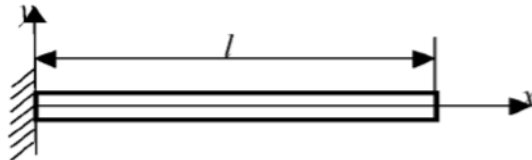


Рисунок 1.4 – Балка, шарнирно закрепленная по концам

Граничные условия имеют вид:

$$1. \nu(0) = 0, \quad 2. \vartheta(0) = 0, \quad 3. M(l) = 0, \quad 4. Q(l) = 0.$$

Из условий 1 и 2 в соответствии с (1.14) имеем $c_1 = c_2 = 0$. Тогда:

$$\left. \begin{aligned} \nu(x) &= c_3 K_3(\alpha x) + c_4 K_4(\alpha x); \\ M(x) &= EI_Z \alpha^2 [c_3 K_1(\alpha x) + c_4 K_2(\alpha x)]; \\ Q(x) &= EI_Z \alpha^3 [c_3 K_4(\alpha x) + c_4 K_1(\alpha x)]. \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

Граничные условия 3 и 4 приводят к системе однородных уравнений относительно постоянных c_3, c_4 :

$$\left. \begin{aligned} EI_Z \alpha^2 [c_3 K_1(\beta) + c_4 K_2(\beta)] &= 0; \\ EI_Z \alpha^2 [c_3 K_4(\beta) + c_4 K_1(\beta)] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

Можно показать, что, как и в предыдущей задаче, $\alpha \neq 0$. Тогда должен быть равен нулю определитель

$$\begin{vmatrix} K_1(\beta) & K_2(\beta) \\ K_4(\beta) & K_1(\beta) \end{vmatrix} = 0, \text{ т.е. } K_1^2(\beta) - K_2(\beta)K_4(\beta) = 0,$$

или с учетом (1.7): $(ch\beta + \cos\beta)^2 - (sh^2\beta - \sin^2\beta) = 0$. Имея в виду, что $sh^2\beta - ch^2\beta = 1$, после тождественных преобразований получим частотное уравнение

$$\cos\beta = -1/ch\beta. \quad (1.25)$$

Пусть теперь балка имеет свободные концы (рис. 1.5). Тогда на концах балки изгибающий момент и перерезывающая сила равны нулю.

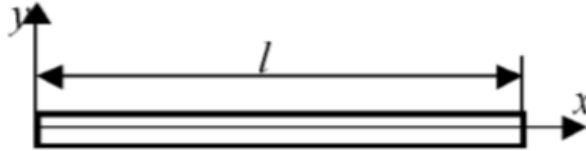


Рисунок 1.5 – Свободная балка

Граничные условия задачи:

$$\begin{array}{cccc} 1. & 2. & 3. & 4. \\ M(0) = 0, & Q(0) = 0, & M(l) = 0, & Q(l) = 0. \end{array}$$

Из условий 1 и 2 с учетом (1.14) вытекает, что $c_3 = c_4 = 0$. Тогда

$$\left. \begin{array}{l} v(x) = c_1 K_1(\alpha x) + c_2 K_2(\alpha x); \\ M(x) = EI_z \alpha^2 [c_1 K_3(\alpha x) + c_2 K_4(\alpha x)]; \\ Q(x) = EI_z \alpha^3 [c_1 K_2(\alpha x) + c_2 K_3(\alpha x)]. \end{array} \right\} \quad (1.26)$$

Граничные условия 3 и 4 приводят к системе уравнений

$$\left. \begin{array}{l} EI_z \alpha^2 [c_1 K_3(\beta) + c_2 K_4(\beta)] = 0; \\ EI_z \alpha^2 [c_1 K_2(\beta) + c_2 K_3(\beta)] = 0. \end{array} \right\} \quad (1.27)$$

При $\alpha \neq 0$ нетривиальное решение для c_1 и c_2 имеет место при равенстве нулю определителя $\begin{vmatrix} K_3(\beta) & K_4(\beta) \\ K_2(\beta) & K_3(\beta) \end{vmatrix} = 0$.

Рассмотрим консольную балку с грузом на конце (рис. 1.6). Инерцией вращения груза будем пренебрегать, полагая его массу сосредоточенной в одной точке. Из условий $u_y(0, t) = 0$, $\vartheta(0, t) = 0$ получаем, что $c_1 = c_2 = 0$. В этом случае для $v(x)$, $M(x)$ и $Q(x)$ справедливы зависимости (1.23)

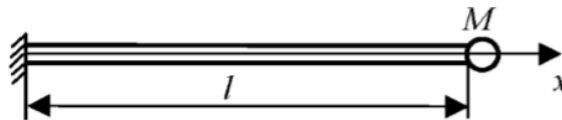


Рисунок 1.6 – Балка с грузом на конце

При $x = l$ изгибающий момент $M(l, t) = 0$, вследствие чего с учетом (1.23) имеем

$$M(l) = EI_z \alpha^2 [c_3 K_1(\beta) + c_4 K_2(\beta)] = 0. \quad (1.28)$$

Чтобы сформулировать четвертое граничное условие, отделим груз от балки (рис. 1.7)

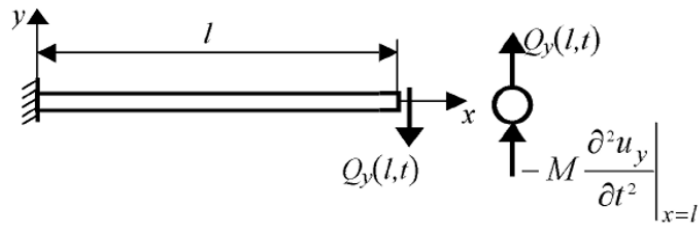


Рисунок 1.7 – Груз, отделенный от балки

При $x = l$ в сечении балки действует перерезывающая сила $Q_y(l, t)$. Такая же сила, но направленная в противоположную сторону, действует со стороны балки на массу M . Если к ней добавить силу инерции $(-M \partial^2 u_y / \partial t^2 |_{x=l})$, то можно рассматривать груз как находящийся в состоянии равновесия, т.е.

$$Q_y(l, t) - M \partial^2 u_y / \partial t^2 |_{x=l} = 0.$$

Подставим в это равенство ряды (1.11), (1.12):

$$\sum_{\infty} Q(l) \sin(\omega t + \varphi) + M \sum_{\infty} \omega^2 v(l) \sin(\omega t + \varphi) = 0.$$

Отсюда с учетом (1.23) получим:

$$EI_Z \alpha^3 [c_3 K_4(\beta) + c_4 K_1(\beta)] + M \omega^2 [c_3 K_3(\beta) + c_4 K_4(\beta)] = 0.$$

Зная, что $\omega^2 = \alpha^4 EI_Z / m_0$. Введем теперь обозначение $\kappa = M / (m_0 l)$ и приведем последнее равенство к виду:

$$c_3 [K_4(\beta) + \kappa \beta K_3(\beta)] + c_4 [K_1(\beta) + \kappa \beta K_4(\beta)] = 0$$

Выразим функции Крылова через гиперболические и тригонометрические функции по (1.7) и получим для определения β частотное уравнение:

$$\cos \beta = \kappa \beta (\sin \beta - th \beta \cos \beta) - 1 / ch \beta. \quad (1.29)$$

2 ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

2.1 Вывод частотного уравнения

Рассмотрим балку длины L прямоугольного сечения площади A и момента инерции J поперечного сечения. Пусть балка выполнена из материала с модулем Юнга E и плотностью ρ . Причем балка по всей длине поддерживается упругим основанием с коэффициентом жесткости k 11 (рис. 2.1).

¹¹ Хазанов Х.С. Механические колебания систем- Учеб. Пособие. Самар, госуд. аэрокосмич. ун-т. Самара, 2002. 80 с.

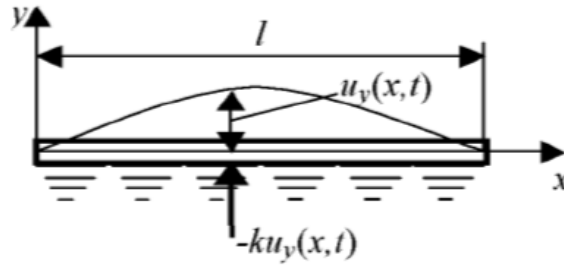


Рисунок 2.1 – Балка, лежащая на упругом основании

Тогда собственные поперечные (изгибные) колебания балки, лежащей на упругой основе, описываются уравнением:

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + ku = 0, \quad (2.1)$$

где $u = u(x, t)$ – прогибы балки;

x – осевая координата;

t – время;

E – модуль Юнга (материала балки);

$\rho A = m_0$ – масса единицы длины поперечного сечения балки.

Введем в рассмотрение безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{x}{L}; \quad v = \frac{u}{L}; \quad \tau = \sqrt{\frac{k}{\rho A}} t.$$

$$\text{Откуда:} \quad x = L\xi; \quad u = vL; \quad t = \sqrt{\frac{\rho A}{k}} \tau. \quad (2.2)$$

Подставим (2.2) в (2.1), получим:

$$\rho A \frac{\partial^2 (vL)}{\partial \left(\sqrt{\frac{\rho A}{k}} \tau \right)^2} + EJ \frac{\partial^4 (vL)}{\partial (L\xi)^4} + kvL = 0;$$

$$\frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4} + \frac{kL^4}{EJ} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + v \right) = 0.$$

Введем обозначение:

$$\alpha^4 = \frac{kL^4}{EJ} \quad (2.3)$$

Тогда последнее уравнение примет вид:

$$\frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4} + \alpha^4 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + v \right) = 0.$$

Для разделения переменных ξ и τ решение последнего уравнения рассмотрим в виде:

$$v = W(\xi) \sin(\omega\tau + \varphi), \quad (2.4)$$

где ω – частота колебания балки.

Найдем необходимые для этого частные производные от функции $v = v(\xi; \tau)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \xi} &= W'(\xi) \sin(\omega\tau + \varphi); & \frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4} &= W^{(4)}(\xi) \sin(\omega\tau + \varphi); \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} &= W''(\xi) \sin(\omega\tau + \varphi); & \frac{\partial v}{\partial \tau} &= W(\xi) \cos(\omega\tau + \varphi) \omega; \\ \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^3} &= W'''(\xi) \sin(\omega\tau + \varphi) & \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} &= -W(\xi) \sin(\omega\tau + \varphi) \omega^2. \end{aligned}$$

Подставим $\frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}$ и v (из (2.4)) в уравнение, получим:

$$W^{(4)}(\xi) \sin(\omega\tau + \varphi) + \alpha^4 (-\omega^2 W(\xi) \sin(\omega\tau + \varphi) + W(\xi) \sin(\omega\tau + \varphi)) = 0.$$

Разделим уравнение на $\sin(\omega\tau + \varphi)$:

$$W^{(4)}(\xi) + \alpha^4 (1 - \omega^2) W(\xi) = 0$$

или

$$W^{(4)}(\xi) + \lambda^4 W(\xi) = 0, \tag{2.5}$$

где $\lambda^4 = \alpha^4 (1 - \omega^2)$.

Уравнение (2.5) является однородным дифференциальным уравнением четвертого порядка с постоянными коэффициентами.

Решение уравнения (2.5) найдем с помощью характеристического определителя в виде: амплитуды колебаний

$$W(\xi) = C_1 ch \lambda \xi + C_2 sh \lambda \xi + C_3 \cos \lambda \xi + C_4 \sin \lambda \xi, \tag{2.6}$$

где C_i – амплитуды колебаний (const), λ – спектральный параметр.

Рассмотрим следующие краевые условия: балка имеет скользящую заделку с пружиной растяжения, слева с жесткостью c_1 , справа – жесткостью c_2 (рис. 2.2)

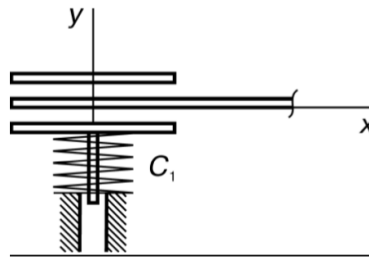


Рисунок 2.2 – Скользящая заделка с пружиной растяжения¹²

Тогда в безразмерных переменных краевые условия примут вид:

$$\begin{cases} W''(0) = 0; \\ W'''(0) - k_1 W(0) = 0; \\ W''(1) = 0; \\ W'''(1) + k_2 W(1) = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\text{Здесь: } k_1 = \frac{c_1}{EJ}; k_2 = \frac{c_2}{EJ}. \tag{2.8}$$

¹² Доев В.С. Поперечные колебания балок - учебное пособие М КНОРУС, 2016. — 412 с.

Подставим решение (2.6) в краевые условия (2.7).

Имеем:

$$\begin{cases} C_1\lambda^2 ch0 + C_2\lambda^2 sh0 - C_3\lambda^2 \cos 0 - C_4\lambda^2 \sin 0 = C_1\lambda^2 - C_3\lambda^2 = 0; \\ C_1\lambda^3 sh0 + C_2\lambda^3 ch0 + C_3\lambda^3 \sin 0 - C_4\lambda^3 \cos 0 - k_1(C_1ch0 + C_2sh0 + C_3 \cos 0 + C_4 \sin 0) = \\ = C_2\lambda^3 - C_4\lambda^3 - k_1C_1 - k_1C_3 = 0; \\ C_1\lambda^2 ch\lambda + C_2\lambda^2 sh\lambda - C_3\lambda^2 \cos \lambda - C_4\lambda^2 \sin \lambda = 0; \\ C_1\lambda^3 sh\lambda + C_2\lambda^3 ch\lambda + C_3\lambda^3 \sin \lambda - C_4\lambda^3 \cos \lambda + k_2C_1ch\lambda + k_2C_2sh\lambda + k_2C_3 \cos \lambda + \\ + k_2C_4 \sin \lambda = C_1(\lambda^3 sh\lambda + k_2ch\lambda) + C_2(\lambda^3 ch\lambda + k_2sh\lambda) + C_3(\lambda^3 \sin \lambda + k_2 \cos \lambda) + \\ + C_4(-\lambda^3 \cos \lambda + k_2 \sin \lambda) = 0. \end{cases}$$

или:

$$\begin{cases} C_1\lambda^2 - C_3\lambda^2 = 0; \\ C_2\lambda^3 - C_4\lambda^3 - k_1C_1 - k_1C_3 = 0; \\ C_1\lambda^2 ch\lambda + C_2\lambda^2 sh\lambda - C_3\lambda^2 \cos \lambda - C_4\lambda^2 \sin \lambda = 0; \\ C_1(\lambda^3 sh\lambda + k_2ch\lambda) + C_2(\lambda^3 ch\lambda + k_2sh\lambda) + C_3(\lambda^3 \sin \lambda + k_2 \cos \lambda) + \\ + C_4(-\lambda^3 \cos \lambda + k_2 \sin \lambda) = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Решим систему (2.9) относительно ненулевых C_1, C_2, C_3, C_4 амплитуд колебаний. Для этого определитель матрицы системы приравняем к нулю:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & 0 & -\lambda^2 & 0 \\ -k_1 & \lambda^3 & -k_1 & -\lambda^3 \\ \lambda^2 ch\lambda & \lambda^2 sh\lambda & -\lambda^2 \cos \lambda & -\lambda^2 \sin \lambda \\ \lambda^3 sh\lambda + k_2ch\lambda & \lambda^3 ch\lambda + k_2sh\lambda & \lambda^3 \sin \lambda + k_2 \cos \lambda & -\lambda^3 \cos \lambda + k_2 \sin \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель, получим частотное уравнение:

$$\begin{aligned} & \lambda^{10} \cos(\lambda)^2 + \lambda^{10} \sin(\lambda)^2 - 2\lambda^7 sh(\lambda)k_2 \cos(\lambda) - 2\lambda^7 sh(\lambda)k_1 \cos(\lambda) + \\ & + 4\lambda^4 sh(\lambda)k_1k_2 \sin(\lambda) + 2\lambda^7 ch(\lambda)k_1 \sin(\lambda) - 2\lambda^{10} ch(\lambda) \cos(\lambda) + \\ & + 2\lambda^7 ch(\lambda)k_2 \sin(\lambda) + \lambda^{10} ch(\lambda)^2 - \lambda^{10} sh(\lambda)^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из уравнения (2.10) при различных значениях k_1 и k_2 можно определять спектральные параметры λ_i ($i=1,2,3,\dots$) и соответствующие им частоты ω_i ($i=1,2,3,\dots$), колебаний балки на упругой опоре.

2.2 Реализация алгоритма поиска частот изгибных колебаний балки с основанием в пакете Maple

При решении прямой задачи по колебаниям балки на упругом основании было получено частотное уравнение (2.10). Из уравнения (2.10) при известных значениях физических параметров балки и известных жесткостях скользящих опор можно определять значения частот ее колебаний.

Рассмотрим влияние коэффициентов жесткостей опор балки на значения частот ее колебаний.

Пусть даны следующие физические параметры балки, лежащей на упругом основании:

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1}, \quad c_2 = 1 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1}, \quad l = 0,1 \text{ м}, \\ E &= 2,2 \cdot 10^{11} \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}, \quad I = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4, \quad k = 2 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Тогда $k_1 = \frac{c_1}{EJ}$; $k_2 = \frac{c_2}{EJ}$.

Решения задач выполнены в среде Maple 13,14. Программа позволяет по заданным характеристикам балки определять собственные частоты ее колебаний.

Были использованы следующие команды математического пакета Maple.

> **restart** (данная команда очищает от старого смысла и значений все переменные);
 > **with(LinearAlgebra)** (команда для подключения библиотек и функционала Линейной алгебры);

> **matrix** (команда позволяет сформировать матрицу);
 > **determinant** (команда предназначена для вычисления определителя матрицы);
 > **solve** (команда для решение нелинейных уравнений в системе Maple, выдает решение в аналитическом виде).

Приведем **листинг программы** с необходимыми пояснениями шагов алгоритма.

```
> restart;
Подключаем функционал и библиотеку линейной алгебры
> with(LinearAlgebra):
> A := Matrix(4, [[a^2,0,-a^2,0], [-k_1,a^3,-k_1,-a^3],
[a^2*cosh(a),a^2*sinh(a),-a^2*cos(a),-a^2*sin(a)],
[a^3*sinh(a)+k_2*cosh(a),a^3*cosh(a)+k_2*sinh(a),a^3*sin(a)+k_2*cos(a)
),-a^3*cos(a)+k_2*sin(a)]]);
```

$$A := \begin{vmatrix} a^2 & 0 & -a^2 & 0 \\ -k_1 & a^3 & -k_1 & -a^3 \\ a^2 \operatorname{ch} a & a^2 \operatorname{sh} a & -a^2 \cos a & -a^2 \sin a \\ a^3 \operatorname{sh} a + k_2 \operatorname{ch} a & a^3 \operatorname{ch} a + k_2 \operatorname{sh} a & a^3 \sin a + k_2 \cos a & -a^3 \cos a + k_2 \sin a \end{vmatrix}$$

Далее находим определитель матрицы – частотное уравнение прямой спектральной задачи в аналитическом виде:

```
> y := Determinant(A);
```

$$y := a^{10} \cos(a)^2 + a^{10} \sin(a)^2 - 2a^7 \operatorname{sh}(a)k_2 \cos(a) - 2a^7 \operatorname{sh}(a)k_1 \cos(a) + \\ + 4a^4 \operatorname{sh}(a)k_1k_2 \sin(a) + 2a^7 \operatorname{ch}(a)k_1 \sin(a) - 2a^{10} \operatorname{ch}(a) \cos(a) + \\ + 2a^7 \operatorname{ch}(a)k_2 \sin(a) + a^{10} \operatorname{ch}(a)^2 - a^{10} \operatorname{sh}(a)^2$$

Формируем (задаем) числовые значения коэффициентов жесткостей опор балки:

```
> k_1 := 5; k_2 := 6;
```

¹³ Матросов А. В. Maple 7. Решение задач высшей математики и механики. – М.: «ВНУ», 2000. – С. 352-357.

¹⁴ Дьяконов В.П. Maple 12. Учебный курс. – М.: Питер, 2008. – С. 112.

$$k_1 := 5$$

$$k_2 := 6$$

Подставляем значения коэффициентов жесткостей опор балки в предыдущее частотное уравнение :

```
> eq := y;
```

$$eq := a^{10} \cos(a)^2 + a^{10} \sin(a)^2 - 22a^7 sh(a) \cos(a) + 120a^7 sh(a) \sin(a) + \\ + 22a^7 \sin(a) ch(a) - 2a^{10} ch(a) \cos(a) + a^{10} ch(a)^2 - a^{10} sh(a)^2$$

Определяем значения частот изгибных колебаний балки с основанием, решая численным способом частотное уравнение, задавая промежутки расположения частот колебаний:

```
> a1 := fsolve(eq = 0, a, 0 .. 5); a2 := fsolve(eq = 0, a, 5 .. 8); a3 := fsolve(eq = 0, a, 8 .. 11); a4 := fsolve(eq = 0, a, 11 .. 15); a5 := fsolve(eq = 0, a, 15 .. 20);
```

$$a_1 := 4.624733166$$

$$a_2 := 7.830557918$$

$$a_3 := 10.98734937$$

$$a_4 := 14.13327673$$

$$a_5 := 17.27662883$$

Таким образом с заданной точностью (до 9 знаков после запятой) можно быстро определять весь спектр частот колебаний балки с упругим основанием.

2.3 Зависимость частот колебаний балки от коэффициентов жесткости ее скользящих опор.

Применим теперь алгоритм поиска частот колебаний балки с основанием с помощью численных расчетов в Maple для исследования зависимости частот колебаний (a значит и спектральных чисел λ) от значений параметров ее жесткости.

Пусть снова рассматриваются физические параметры (2.11), с помощью которых перейдем к безразмерным значениям коэффициентов жесткостей

$$k_1 = \frac{c_1}{EJ}; k_2 = \frac{c_2}{EJ}. \quad (2.12)$$

При этом видим, что если будут меняться безразмерные значения k_1 и k_2 , то в соответствие с равенствами (2.12) будут меняться и размерные значения c_1 и c_2 коэффициентов жесткостей опор балки.

Будем менять значения коэффициентов k_1 и k_2 жесткостей пружин скользящих опор балки, оставляя остальные физические параметры (2.11) неизменными, и определять соответствующие безразмерные частоты колебаний. При этом решение прямой спектральной задачи (2.5), (2.8) показывает, что собственные значения λ будут уменьшаться.

В таблице 2.1 даны первые пять собственных значений задачи, соответствующие увеличивающимся значениям коэффициента k_1 левого конца скользящей опоры балки. На

рисунках 2.3 и 2.4 приведены графики зависимостей первых двух собственных значений λ_1 и λ_2 от коэффициента жесткости k_1 .

Таблица 2.1 – Зависимость собственных значений λ_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$) от жесткостей k_i балки при параметрах (2.11) системы

k_1	k_2	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
5	6	4,6247	7,8305	10,9873	14,1332	17,2766
10	6	4,5768	7,8203	10,9836	14,1315	17,2756
15	6	4,5311	7,8102	10,9798	14,1297	17,2746
20	6	4,4879	7,8003	10,9761	14,1280	17,2737
25	6	4,4474	7,7904	10,9725	14,1262	17,2727

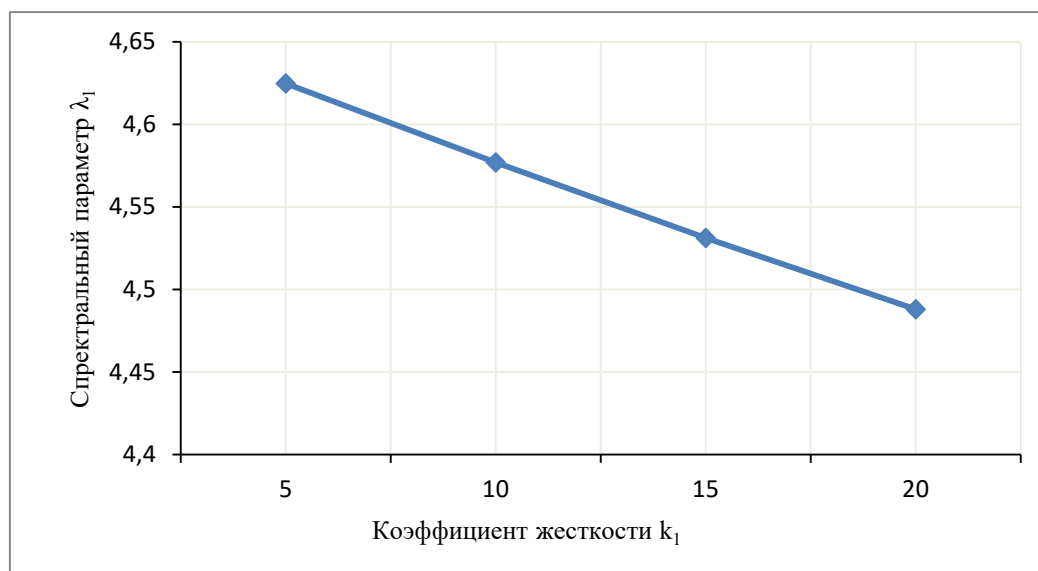


Рисунок 2.3 – Зависимость спектрального параметра λ_1 от коэффициента жесткости k_1 скользящей опоры при параметрах (2.11)

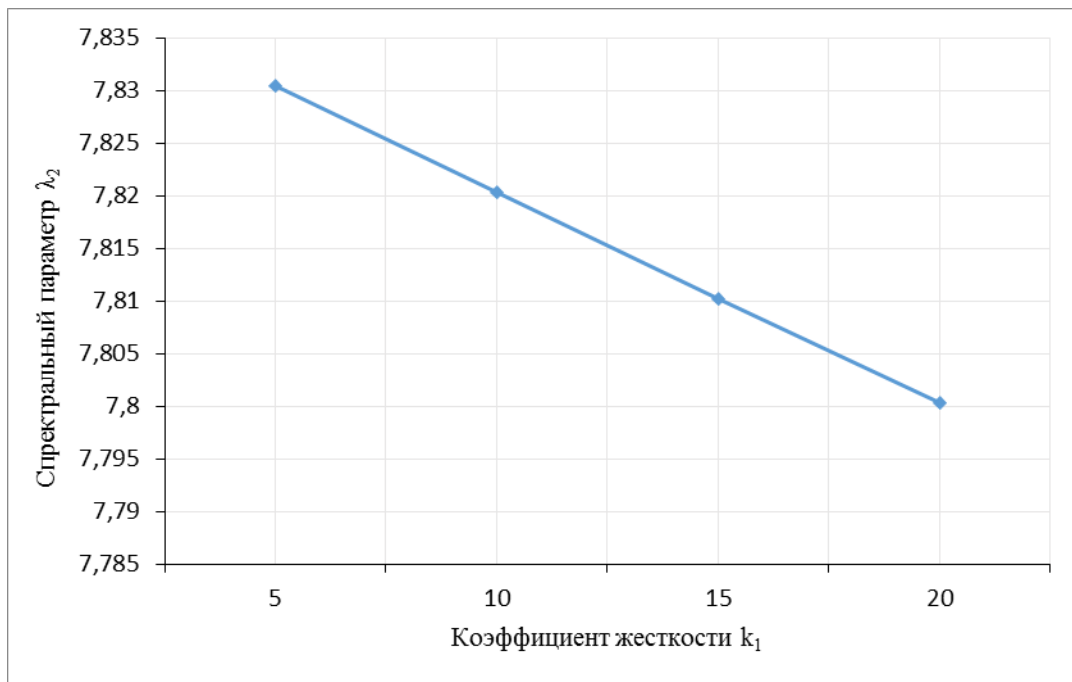


Рисунок 2.4 – Зависимость спектрального параметра λ_2 от коэффициента жесткости k_1 скользящей опоры при параметрах (2.11)

Если же увеличивать значения коэффициента жесткости k_2 скользящей опоры на левом конце балки, оставляя коэффициент k_1 правой опоры неизменной, то получим, что собственные значения λ_i ($i=1, 2, 3, \dots$) задачи также будут уменьшаться.

В таблице 2.2 даны пять собственных значений задачи, соответствующие увеличивающимся значениям коэффициента k_2 правой опоры балки. На рисунках 2.5 и 2.6 приведены графики зависимостей первых двух собственных значений λ_1 и λ_2 от коэффициента жесткости k_2 .

Таблица 2.2 – Зависимость собственных значений λ_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$) от жесткостей k_2 балки при параметрах (2.11)

k_1	k_2	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
10	5	4,5870	7,8224	10,9843	14,1318	17,2758
10	7	4,5666	7,8182	10,9828	14,1311	17,2754
10	9	4,5466	7,8141	10,9813	14,1304	17,2750
10	11	4,5270	7,8100	10,9798	14,1297	17,2746
10	13	4,5078	7,8060	10,9783	14,1290	17,2743

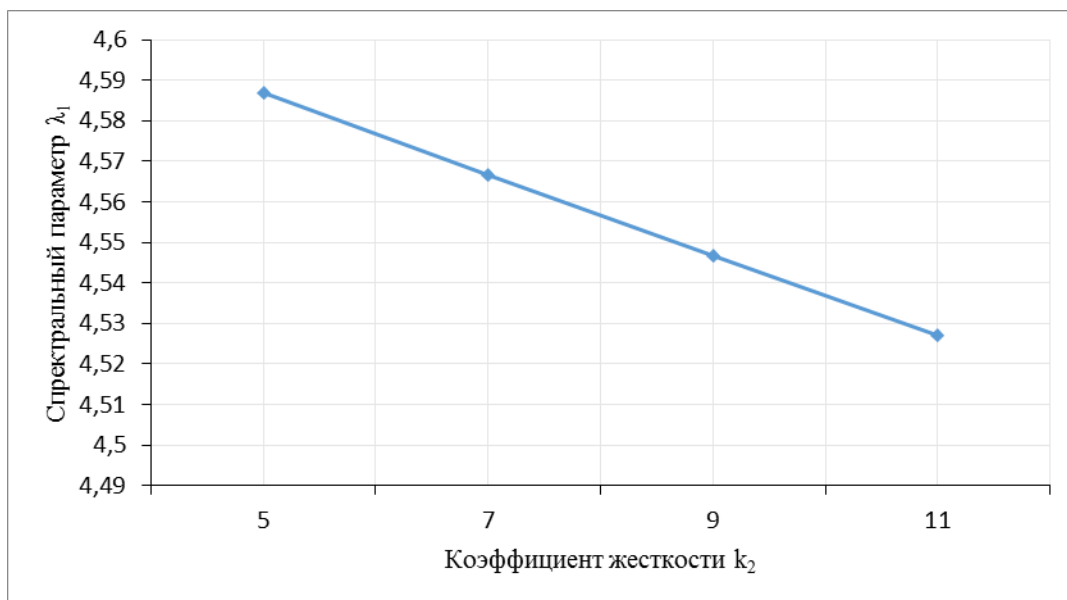


Рисунок 2.5 – Зависимость спектрального параметра λ_1 от коэффициента жесткости k_2 скользящей опоры при параметрах (2.11)

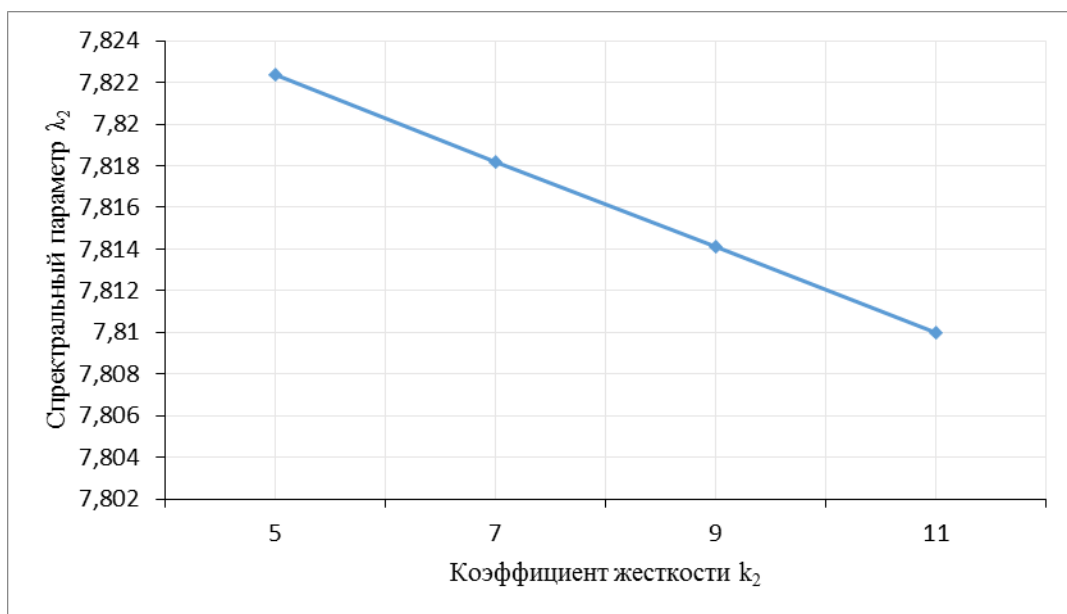


Рисунок 2.6 – Зависимость спектрального параметра λ_2 от коэффициента жесткости k_2 скользящей опоры при параметрах (2.11)

Если же одновременно увеличивать значения коэффициентов жесткости k_1 и k_2 скользящей опоры балки, то получим, что собственные значения λ_i также будут уменьшаться, что подтверждают, например, таблица 2.3 и рисунки 2.7 и 2.8.

Таблица 2.3 – Зависимость спектрального параметра λ_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$) от коэффициентов жесткостей k_1 и k_2 опор балки при ее параметрах (2.11)

k_1	k_2	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
6	8	4,5957	7,8244	10,9851	14,1322	17,2760
8	10	4,5566	7,8162	10,9821	14,1308	17,2752

10	13	4,5078	7,8060	10,9783	14,1290	17,2743
12	15	4,4684	7,7978	10,9753	14,1276	17,2735
14	18	4,4196	7,7877	10,9716	14,1258	17,2725

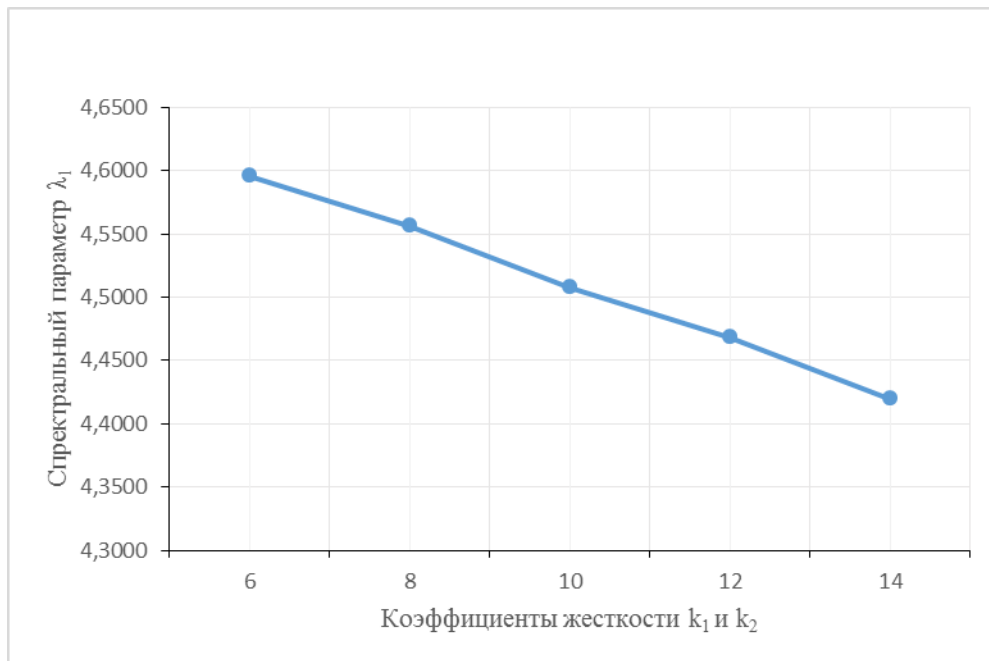


Рисунок 2.7 – Зависимость спектрального параметра λ_1 от коэффициента жесткости k_1 и k_2 скользящих опор балки при параметрах (2.11)

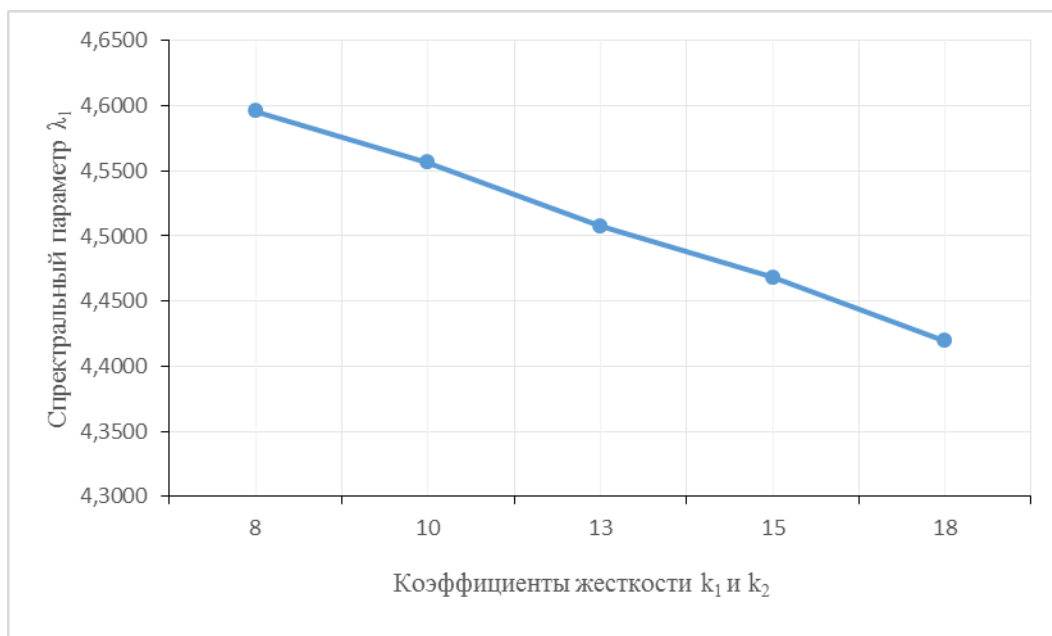


Рисунок 2.8– Зависимость спектрального параметра λ_1 от коэффициента жесткости k_1 и k_2 скользящих опор балки при параметрах (2.11)

Заметим, что такие же обратные зависимости спектральных параметров λ_i от коэффициентов жесткости скользящих опор балки образуются и при других ее физических параметрах, отличных от параметров (2.11)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В научной работе рассмотрена прямая задача спектральная задача по свободным изгибным колебаниям балки на упругом основании. Математическая модель колебательного процесса сведена к краевой задаче и дальнейшей системе линейных уравнений, из которой с помощью характеристического определителя получено частотное уравнение.

Для нахождения собственных частот поперечных колебаний балки были использованы средства математического пакета Maple.

По решению прямой задачи исследовано влияние на собственные частоты колебаний балки на упругом основании коэффициентов жесткости ее скользящих опор с левой и правой стороны. Получено, что увеличение коэффициентов жесткости балки ведет к уменьшению значений собственных частот ее колебаний. Рассмотрены зависимости от краевых условий как собственных значений краевой задачи, так и собственных частот колебаний балки. Зависимости приведены при различных физических параметрах балки, ее упругого основания.

Приведены графики и таблицы рассмотренных зависимостей. Для построения графиков зависимостей собственных значений балки от коэффициентов жесткостей использована программа Excel. Приведена программная реализация алгоритма решения прямой задачи, использующая команды математического пакета Maple.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. – СПб: Питер, 2001. – 408 с.
2. Бутенин, Теория колебаний / Бутенин – СПб.: Судостроение», 1963. – 186 с.
3. Доев В.С. Поперечные колебания балок - учебное пособие М КНОРУС, 2016. – 412 с.
4. Дьяконов В.П. Maple 7. Учебный курс. – СПб: Питер, 2002. – 672 с.
5. Ефремов Л.В. Теория и практика исследований крутильных колебаний силовых установок с применением компьютерных технологий. – М.: Издательство «Наука», 2007. – С. 143-147.
6. Коллатц, Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями): учеб.пос. / Л. Коллатц – М.: Наука, 1968.
7. Колосова, Г.С., Куроедов, В.В. Применение функций Крылова А. Н. для решения задач строительной механики. – СПб. : ФГБОУ ВПО СПбГПУ, 2013 – 43с.
8. Коренев Б. Г., Ручимский М. Н. Некоторые задачи динамики балок на упругом основании ЦНИПС, научное сообщение, Гос. Изд. Литературы по строит. И архитектуре, 1955.
9. Костюк А.Г. Динамика и прочность турбомашин. – М.: Издательский дом МЭИ, 2007. – С. 232-238.
10. Магнус, К. Колебания / К. Магнус – М.: Издательство «Машиностроение», 1982. – 304 с.
11. Матросова А. В. Maple 7. Решение задач высшей математики и механики. – Издательство «ВНУ», 2000. – С. 499-503.
12. Мигулин, В.В. Основы теории колебаний / В.В. Мигулин – М.: Издательство «Наука», 1978. – 392 с.
13. Обморшев, А.Н. Введение в теорию колебаний / А.Н. Обморшев – М.: Издательство «Наука», 1990. – 276 с.
14. Савотченко С.Е., Кузьмичева Т.Г. Методы решения математических задач в Maple – Белгород: Белаудит, 2001. – С. 21-24.

15. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Издательство «Наука», 1967. – С. 356-363.

16. Хазанов, Х.С. Механические колебания систем с распределенными параметрами / Х.С.Хазанов – Самар. госуд. аэрокосмич. ун-т. Самара, 2002. – 82 с.